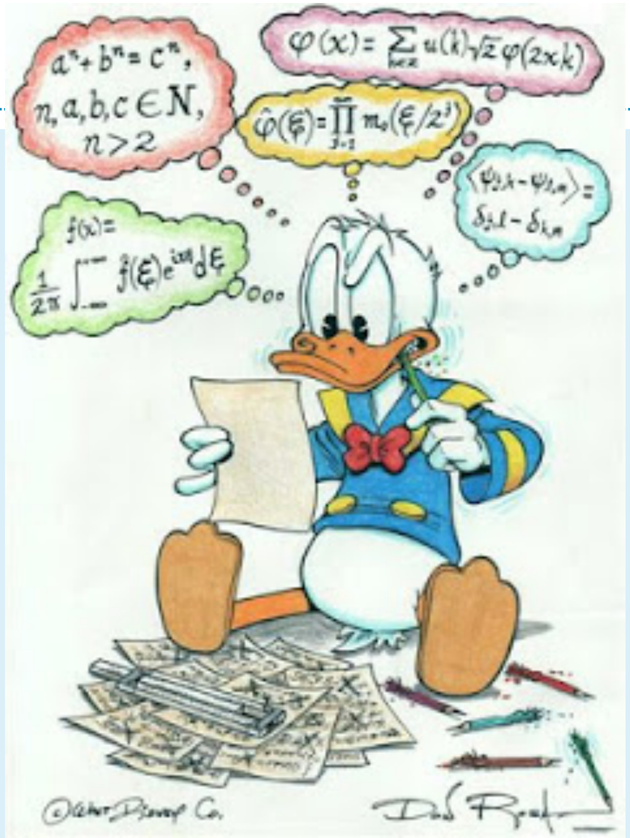
ALGEBRA



Esercizio 1

- Quale dei seguenti binomi è il prodotto della somma di due termini per la loro differenza?

A) $-32y^2 - 9$
B) $16y^2 + 9$
C) $32y^2 + 9$
D) $16y^2 - 9$
E) nessuna delle precedenti

RICORDA!

PRODOTTI NOTEVOLI

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Soluzione esercizio 1

Considerando il prodotto notevole

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

l'unico binomio in cui riconosciamo una differenza di quadrati è $16y^2-9$.

RISPOSTA: D

Esercizio 2

- L'espressione $x^a x^{c-a} + (x^b \frac{x^c}{x^b})^{\frac{a}{b}}$ equivale a :

A) $x^c + x^{\frac{ac}{b}}$

B) $x^{ac-a^2} + x^{\frac{ca}{b}}$

C) $x^a + x^{ac}$

D) $x^c + x^{ac}$

E) $x^c + x^{abc}$

Soluzione esercizio 2

Per le proprietà delle potenze l'espressione può essere semplificata nel seguente modo:

$$x^a \frac{x^c}{x^a} + (x^c)^{\frac{a}{b}} = x^c + x^{\frac{ac}{b}}$$

RISPOSTA: A

RICORDA!

PROPRIETÁ DELLE POTENZE

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m$$

Esercizio 3

- Posto che in una azienda si abbiano i dati indicati in tabella, calcolare la media degli stipendi:

A) 13
B) 25,6
C) 40
D) 91
E) 182

	Numero addetti	Stipendio in euro
Direttore	1	70
Capi Ufficio	4	20
Impiegati	10	16
Operai	25	12
Manovali	30	10

Soluzione esercizio 3

	Numero addetti	Stipendio in euro	Totale stipendi
Direttore	1	70	70
Capi Ufficio	4	20	80
Impiegati	10	16	160
Operai	25	12	300
Manovali	30	10	300

Media = totale stipendi/numero totale di addetti =
(70+80+160+300+300) : 70 = 910 : 70 = 13

RISPOSTA: A

Esercizio 3bis

- Dopo la serata dolcetto-scherzetto di Halloween Giulia, Chiara e Irene hanno ottenuto una media di 20 caramelle. Quante caramelle deve recuperare Lucia per alzare la media del gruppo a 25 caramelle?

A) 25

B) 30

C) 35

D) 40

E) 45

Soluzione esercizio 3bis

- La media delle prime 3 amiche è 20 caramelle, quindi possiamo immaginare che ciascuna di loro ha ottenuto 20 caramelle.
- Riprendendo la formula della media otteniamo:

$$\frac{20 \cdot 3 + x}{(3 + 1)} = 25$$

$$\frac{60 + x}{4} = 25$$

$$60 + x = 100$$

$$x = 40$$

RISPOSTA: D

RICORDA!

MEDIA ARITMETICA

Si definisce media aritmetica di un insieme di dati numerici il valore che si ottiene addizionandoli tra loro e dividendo la somma ottenuta per il numero dei dati raccolti.

$$y = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}$$

MEDIANA

La mediana è il valore che occupa il posto centrale in una serie di dati disposti in ordine crescente o decrescente.

MODA

La moda (o valore modale) di un insieme di dati è quel valore che si presenta con maggiore frequenza.

Esercizio 4

- Matteo, Luca, Sofia e Alice ricevono dalla nonna una mancia di 100 euro che decidono di dividersi rispettivamente secondo questa proporzione 2:3:7:8. Che differenza c’è tra la parte di mancia che spetterà ad Alice rispetto a quella di Matteo?

A) 25 euro

B) 30 euro

C) 35 euro

D) 40 euro

E) 45 euro

Soluzione esercizio 4

- Dividiamo l'intera cifra della mancia per la somma delle parti data dalla proporzione per ottenere la parte unitaria

$$\frac{100}{(2+3+7+8)} = \frac{100}{20} = 5$$

- La parte che spetta a Matteo sarà: $5 \cdot 2 = 10$
- La parte di Alice: $5 \cdot 8 = 40$
- La differenza tra le 2 parti: $40 - 10 = 30$

RISPOSTA: B

PROBABILITÀ
E
STATISTICA

Esercizio 1

- Si lanciano in successione 4 dadi a 6 facce. Calcolare la probabilità di avere tutte facce diverse.

A) $\frac{10}{36}$

B) $\frac{8}{36}$

C) $\frac{3}{12}$

D) $\frac{36}{10}$

E) $\frac{1}{6}$

Soluzione esercizio 1

- Al primo lancio non mi interessa quale numero esce. Al secondo ho 5/6 di probabilità che esca un numero diverso dal primo; al terzo 4/6 che esca un numero diverso dai primi 2; al quarto lancio 3/6 che esca un numero diverso dai primi 3.
- Dato che questi eventi sono **indipendenti** e devono verificarsi **contemporaneamente**, moltiplichiamo le singole probabilità:

$$\left(\frac{6}{6}\right) \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{10}{36}$$

RISPOSTA: A

Esercizio 1bis

- Tirando un dado a 6 facce 2 volte, qual è la probabilità che la somma dei risultati sia uguale a 9 o uguale a 4?

A) 1/108

B) 1/21

C) 2/21

D) 7/36

E) Nessuna delle precedenti

Soluzioni 1bis

- Individuiamo le coppie di numeri che soddisfano la richiesta: per il 9 abbiamo 3 e 6, 4 e 5, 5 e 4, 6 e 3; per il 4 sono 1 e 3, 2 e 2, 3 e 1.
- Quindi, la probabilità di ottenere una somma pari a 9 è di 4/6*1/6 = 4/36, mentre quella di ottenere un somma pari a 4 è di 3/6*1/6 = 3/36.
- Visto che i due eventi sono **disgiunti** (cioè *incompatibili – non hanno casi favorevoli sovrapposti*) sommo le due probabilità, per cui ottengo 7/36.

RISPOSTA: D

TEOREMA DELLE PROBABILITÁ TOTALI

Siano E ed F due eventi incompatibili;

la probabilità che si verifichi E **oppure** F è uguale alla

somma

delle probabilità dei singoli eventi.

TEOREMA DELLE PROBABILITÀ COMPOSTE

Siano E ed F due eventi indipendenti;

la probabilità che essi si verifichino **contemporaneamente** è data dal

prodotto

delle probabilità dei singoli eventi.

Esercizio 2

- La Ire vuole riarredare il suo salotto e ha a disposizione 5 quadri ma solo 3 chiodi; in quanti modi diversi potrà abbellire la sua parete utilizzando tutti i 3 chiodi?

A) 3
B) 6
C) 15
D) 60
E) 125

Soluzione esercizio 2

Sul primo chiodo ho 5 possibilità di scelta, sul secondo 4, sul terzo 3.

Quindi le possibili disposizioni corrispondono a:

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

RISPOSTA : D

Esercizio 2bis

- 8 amici si devono posizionare attorno ad un tavolo rotondo. Matteo vuole stare seduto di fronte ad Andrea, il quale vuole seduti al suo fianco Luca e Paolo. In quanti modi posso far sedere gli 8 amici?

A) 48
B) 64
C) 192
D) 384
E) 768

Soluzione esercizio 2bis

- Comincio posizionando Matteo in un posto qualsiasi del tavolo. Una volta trovato il posto a Matteo posiziono Andrea, Luca e Paolo (ricordandomi che Luca e Paolo possono occupare entrambe le posizioni a lato di Andrea). Quando i 4 sono posizionati, gli altri 4 possono mettersi come vogliono nei posti liberi:

- 8[Matteo]*1[Andrea]*2[Luca e Paolo]*4![i 4 rimanenti] = 384

RISPOSTA: D

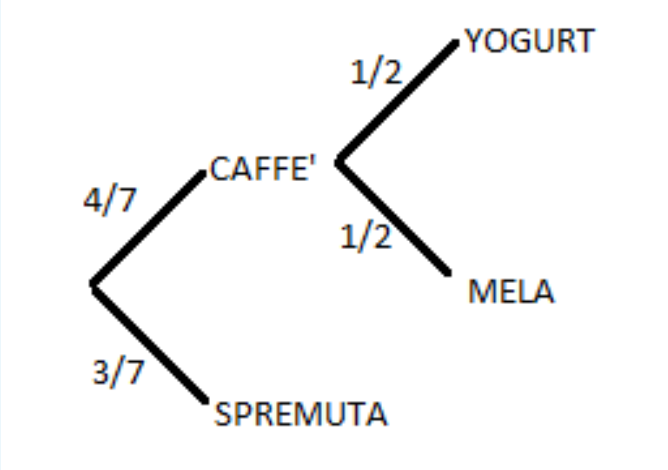
Esercizio 3

Lucia è molto salutista e 3 volte su 7 a colazione beve una spremuta di arancia, mentre negli altri giorni beve il caffè; le mattine in cui beve il caffè, verso le 11 fa uno spuntino: la metà delle volte con una mela e l'altra metà con uno yogurt. Qual è la probabilità che Lucia entro l'ora di pranzo abbia assunto frutta?

A) 2/7
B) 3/7
C) 5/7
D) 5/49
E) 6/49

Soluzione esercizio 3

La situazione può essere ben schematizzata con un diagramma ad albero:



i casi che soddisfano la richiesta del problema sono:

- O che Lucia beva la spremuta = 3/7
- O che, dopo aver assunto il caffè, prenda una mela =

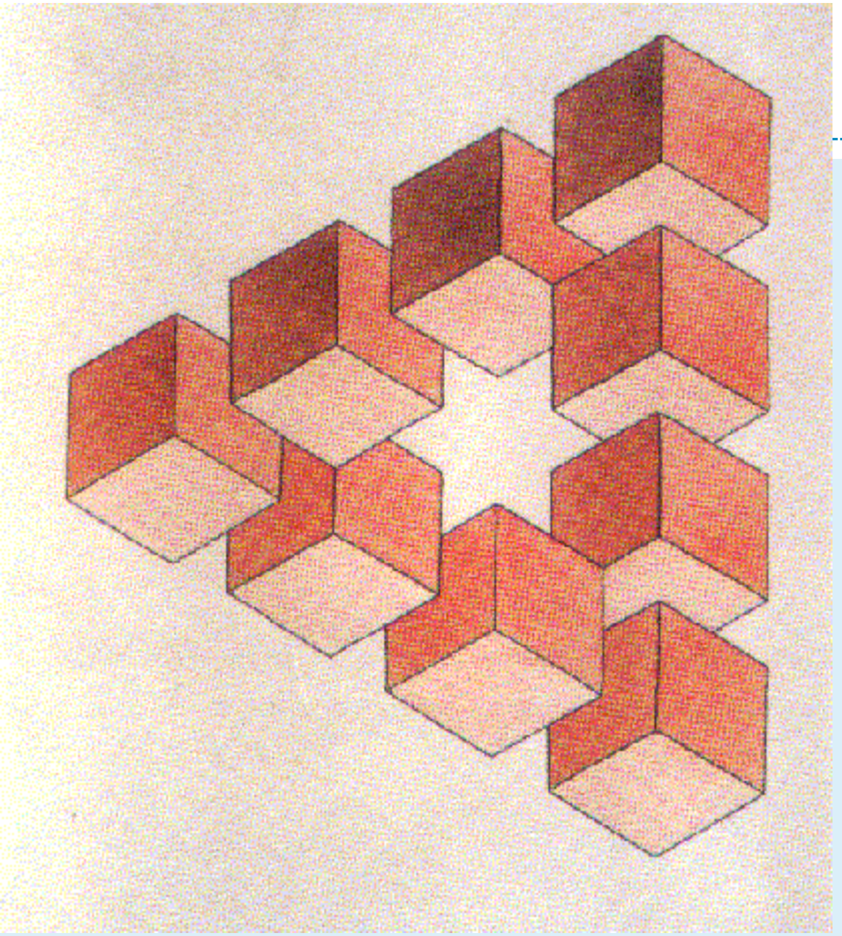
$$4/7 \cdot ½ = 2/7$$

Quindi la probabilità che Lucia assuma frutta corrisponde alla somma di questi due casi

$3/7 + 2/7 = 5/7$

RISPOSTA: C

GEOMETRIA



Esercizio 1

- L'angolo di 27° corrisponde a:

A) $\frac{3}{20}\pi_{rad}$

B) $\frac{2}{360}\pi_{rad}$

C) $27\ \pi_{rad}$

D) $2{,}7\ \pi_{rad}$

E) $\frac{4860}{\pi_{rad}}$

Soluzione esercizio 1

- Ricorda la proporzione:

$$x_{rad} : x° = 2\pi_{rad} : 360°$$

RISPOSTA: A

Esercizio 2

- Quale delle seguenti rette è perpendicolare alla retta $r\colon y = -\frac{1}{2}x + 4$ e passa per il punto A(1;3) ?

A) $y - 2x - 1 = 0$

B) $y + 2x - 1 = 0$

C) $y - \frac{1}{2}x - 1 = 0$

D) $y + \frac{1}{2}x + 1 = 0$

E) $2y - 2x - 1 = 0$

Soluzione esercizio 2

- Condizione di perpendicolarità:

$$m = -\frac{1}{m}$$

$$\Downarrow$$

$$m_1 = -\frac{1}{2} \qquad m_2 = 2$$

La retta generica perpendicolare è dunque $y = 2x + c$.

Impongo il passaggio per A(1;3):

$3 = 2\times(1) + c$ $\Rightarrow$ c=1

la retta ricercata è $y = 2x + 1$ $\Rightarrow$ $y - 2x - 1 = 0$

RISPOSTA: A

RICORDA!

CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITA’

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

CONDIZIONE DI PARALLELISMO

$$m_1 = m_2$$

Esercizio 3

- Un trapezio rettangolo ha base maggiore $\overline{AB} = 10$, base minore $\overline{CD} = 6$ e altezza $\overline{AD} = 3$. Prolungando l'altezza e il lato obliquo del trapezio si ottiene il triangolo ABE. Quanto misura l'altezza del triangolo?

A) $\frac{3+\sqrt{249}}{2}$

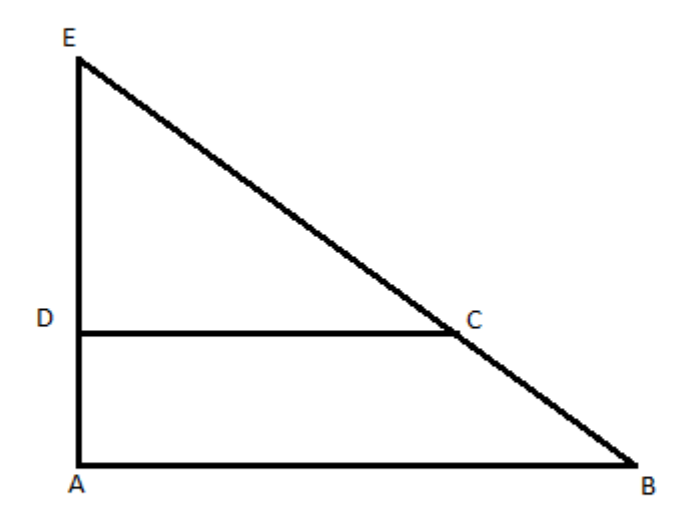
B) $\frac{-3+\sqrt{249}}{2}$

C) 4,5

D) 7,5

E) Non è possibile determinarlo

Soluzione esercizio 3



Pongo $\overline{AE} = x$, quindi $\overline{DE} = x - 3$;
Osservo che i due triangoli ABE e DCE sono simili, per cui vale la proporzione

$$DC : DE = AB : AE$$
$$6 : (x - 3) = 10 : x$$

Risolvendo la proporzione

$$10(x - 3) = 6x$$
$$x = 7{,}5$$

RISPOSTA: D

RICORDA!

Due triangoli si dicono ***simili*** se i loro angoli sono rispettivamente congruenti e i lati opposti agli angoli congruenti sono proporzionali.

Criteri di similitudine dei triangoli:

1. 2 angoli rispettivamente congruenti;
2. 2 lati proporzionali e l’angolo compreso congruente
3. 3 lati proporzionali tra loro

Esercizio 4

- Una sfera di raggio 2 cm e un cilindro circolare retto con raggio di base 2 cm hanno lo stesso volume. Allora l'altezza *h* del cilindro è uguale a:

A) 4 cm

B) 4/3 cm

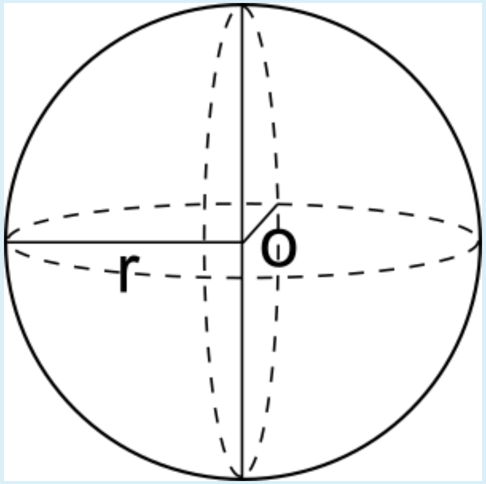
C) 8/3 cm

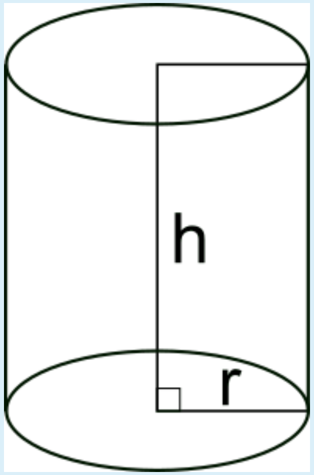
D) 2/3 cm

E) 6 cm

RICORDA!

$$V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$
$$S_{sfera} = 4\pi R^2$$





$$V_{cilindro} = \pi R^2 h$$
$$S_{cilindro} = 2\pi R^2 + 2\pi R h$$
$$S_{lat\ cilindro} = 2\pi R h$$

Soluzione esercizio 4

- La sfera ha volume:

$$V = \frac{4}{3}\pi(2)^3 = \frac{32}{3}\pi$$

Il cilindro ha volume:

$$V = \pi(2)^2 h = 4\pi h$$

Imponendo l'uguaglianza dei 2 volumi si trova:

$$\frac{32}{3}\pi = 4\pi h$$

$$h = \frac{8}{3}$$

RISPOSTA: C

Esercizio 5

- Dato un triangolo rettangolo in C e altezza CH, si sa che i segmenti AH e BH misurano rispettivamente $2a$ e $6a$. Quanto misura il perimetro del triangolo?

A) $4\sqrt{3}a(\sqrt{3}+1)$

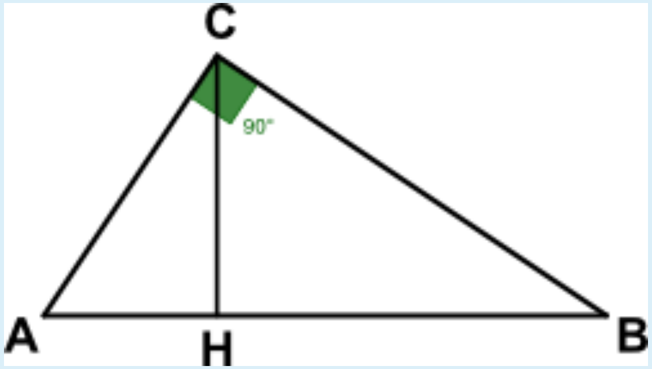
$B)$ $4\sqrt{3}a(\sqrt{3}-1)$

C) $4\sqrt{3}a$

D) $4a(\sqrt{3}+2)$

E) $4a(\sqrt{3}+1)$

Soluzione esercizio 5



Per il PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE:

$$AC^2 = AH \cdot AB$$

$$AC = \sqrt{AH \cdot AB}$$

$$AC = \sqrt{2a \cdot 8a} = \sqrt{16a^2} = 4a$$

Analogamente:

$$BC = \sqrt{6a \cdot 8a} = \sqrt{48a^2} = 4\sqrt{3}a$$

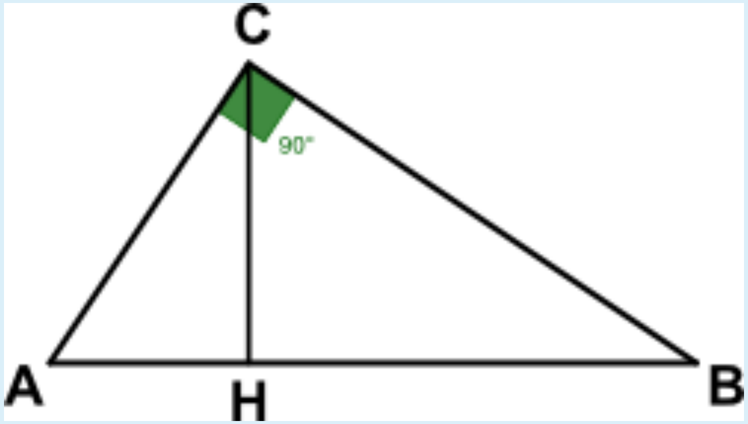
Il perimetro del triangolo è uguale alla somma dei lati:

$$2p = AB + BC + AC$$

$$2p = 8a + 4\sqrt{3}a + 4a = 12a + 4\sqrt{3}a = 4\sqrt{3}a(\sqrt{3} + 1)$$

RISPOSTA: A

RICORDA!



<u>PRIMO TEOREMA DI EUCLIDE</u>:

$$AC^2 = AH \cdot AB \quad \text{o} \quad AH : AC = AC : AB$$

$$BC^2 = BH \cdot AB \quad \text{o} \quad BH : BC = BC : AB$$

<u>SECONDO TEOREMA DI EUCLIDE</u>:

$$CH^2 = AH \cdot HB \quad \text{o} \quad AH : CH = CH : HB$$

Esercizio 6

- Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$, quali delle seguenti affermazioni è FALSA?

A) Ha centro in C(2;-3)

B) Ha raggio *r=3*

C) È tangente alla retta $y = -6$ in A(2;-6)

D) Passa per l'origine degli assi

E) Interseca l'asse delle ordinate in 2 punti distinti

Soluzione esercizio 6

L'equazione $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ può essere riscritta nella forma:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

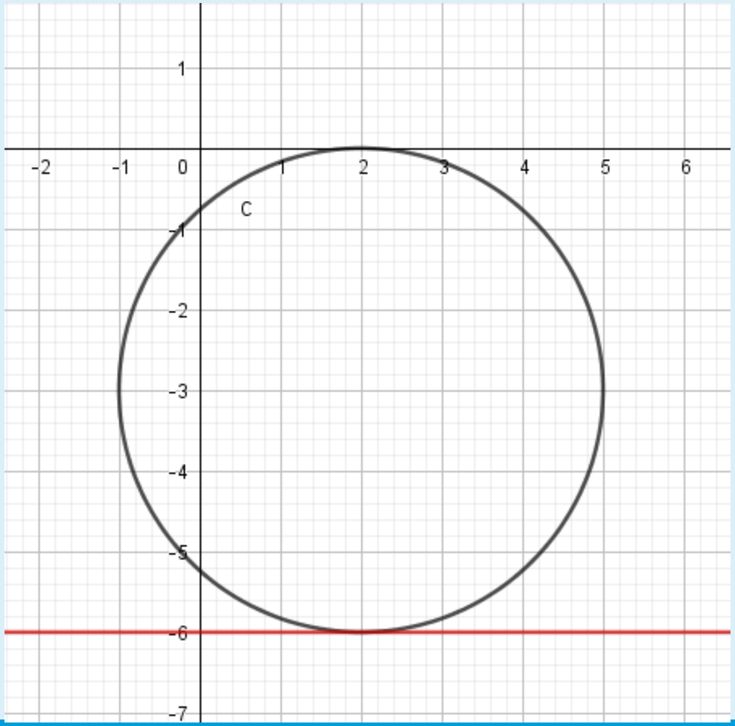
$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 9$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9$$

Da questa verifichiamo velocemente che il centro della circonferenza è C(2;-3) e che il raggio è uguale a 3.

Soluzioni esercizio 6

Disegnando velocemente la circonferenza osserviamo che interseca l'asse delle ordinate in 2 punti distinti, è tangente alla retta $y = -6$ e non passa dall'origine degli assi.



Per ulteriore conferma basta sostituire all'equazione le coordinate (0;0) dell'origine, per cui ottengo 4=0 risultando quindi impossibile. La circonferenza data non passa dall'origine.

RISPOSTA: D

RICORDA!

Equazione della circonferenza:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

$$C(\alpha;\beta)$$

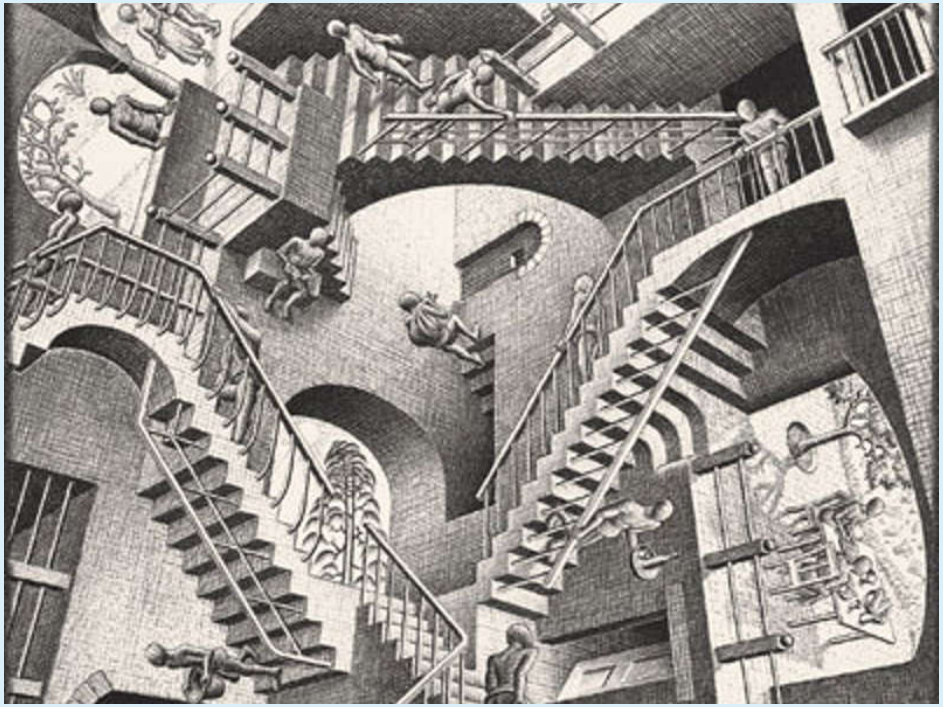
Si può scrivere anche nella forma:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

Da quest'ultima sappiamo che:

- la circonferenza per passare dall'origine deve avere $c=0$
- Il centro C ha coordinate $C(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$
- Il raggio misura $r=\sqrt{(-\frac{a}{2})^2+(-\frac{b}{2})^2-c}$

Funzioni



Esercizio 1

Indicato con x un angolo la cui misura in radianti può variare tra $0 \; e \; 2\pi$, l'equazione $\sin x + \cos x = 0$ ammette:

A) 4 soluzioni

B) 2 soluzioni

C) 1 soluzione

D) 8 soluzioni

E) Nessuna soluzione

Soluzione esercizio 1

- L'equazione è equivalente a dire $\sin x = -\cos x$ che per angoli compresi tra $0\ e\ 2\pi$ ha 2 soluzioni:

$$x = \frac{3}{4}\pi\ e\ x = \frac{7}{4}\pi$$

Infatti:

$$sen\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sen\left(\frac{7}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ e \cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

RISPOSTA: B

Esercizio 2

- La funzione inversa di $y = e^x + 1$ è:

A) $x = e^y - 1$

B) $y = \ln(x - 1)$

C) $y = \frac{1}{e^x + 1}$

D) $y = \ln(x + 1)$

E) $x = \ln(y) - 1$

RISPOSTA: B

Esercizio 3

- Quale delle seguenti uguaglianze è vera?

A) $\ln(x)-\ln(2x)=\ln(-x)$

B) $\ln(x)+\ln(3x)=\ln(3x^2)$

C) $\ln(x^4)=\ln(x)+\ln(4)$

D) $\ln(5x)=\ln(5)*\ln(x)$

E) $\ln(6-x)=\ln(x)/\ln(6)$

RISPOSTA: B

RICORDA!

Proprietà	Esempio
Teorema del prodotto	
$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$	$\log_2(3\ x) = \log_2(3) + \log_2(x)$
Teorema del rapporto	
$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$	$\log_2\left(\frac{x}{3}\right) = \log_2(x) - \log_2(3)$
Teorema della potenza	
$\log_a(b^c) = c\log_a(b)$	$\log_2\left(x^3\right) = 3\log_2(x)$

Esercizio 4

- L'equazione $7^{x^2-8x-9} = 1$ ha come soluzione:

A) $x = -4$

B) $x = -9 \; V \; x = 1$

C) $x = 9 \; V \; x = -1$

D) $x = 3$

E) $x = 4$

Soluzione esercizio 4

- Basta ricordare la proprietà delle potenze per cui qualsiasi numero elevato alla 0 è uguale a 1

$$7^{x^2-8x-9} = 1$$

$$7^{x^2-8x-9} = 7^0$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$(x - 9)(x + 1) = 0$$

$$x = 9 \; V \; x = -1$$

RISPOSTA: C

Esercizio 5

- Determina per quali valori la funzione $y = \frac{\sqrt{4x-6}}{\sqrt[3]{x^3-8x^2}}$ è definita e non negativa:

A) $x \leq \frac{3}{2}\ con\ x \neq 0$

B) $0 < x < \frac{3}{2}\ V\ x > 8$

C) $\forall x \in R$

D) $\nexists x \in R$

E) $x > 8$

Soluzione esercizio 5

- Al numeratore è sufficiente rispettare le condizioni di esistenza della radice quadrata (una radice quadrata non è mai negativa):

$$\sqrt{4x-6} \geq 0$$
$$x \geq \frac{3}{2}$$

Il denominatore, affinché la funzione sia definita e positiva, deve essere maggiore di zero:

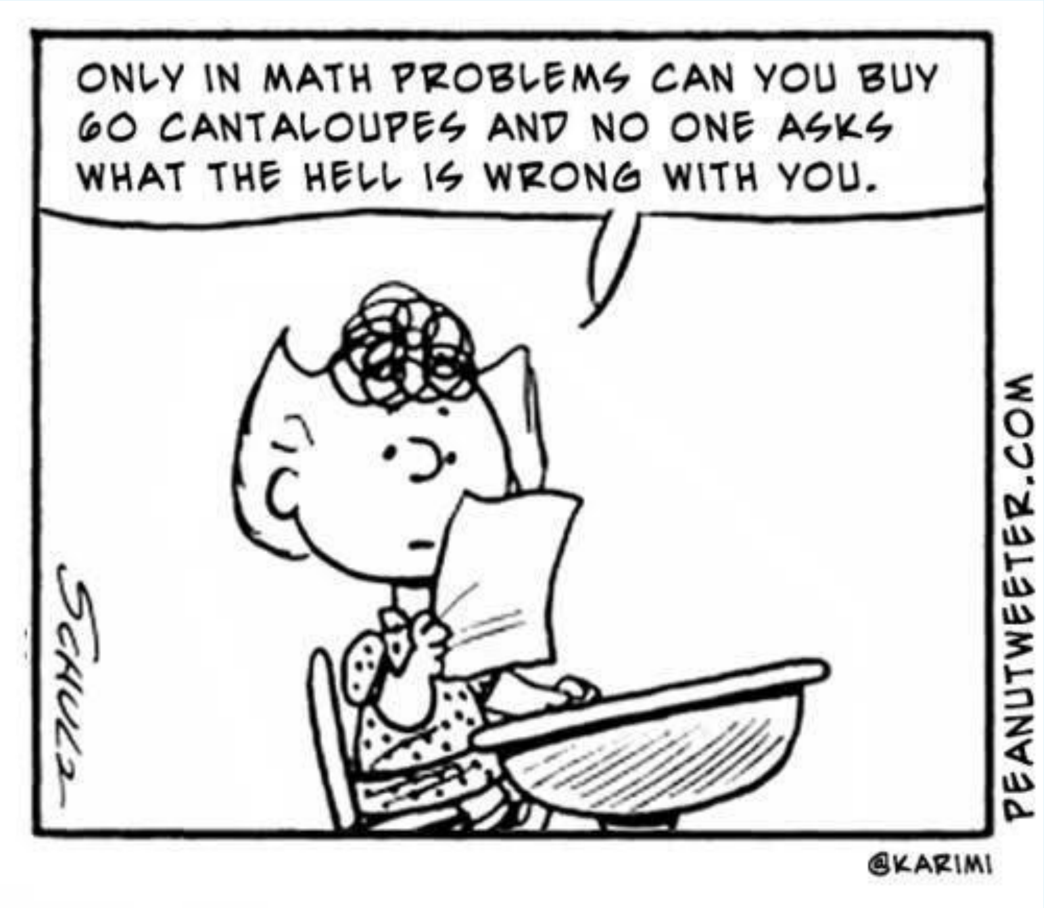
$$\sqrt[3]{x^3-8x} > 0$$
$$x^2(x-8) > 0$$
$$x < 0 \; e \; x > 8$$

Mettendo a sistema le 2 condizioni ottengo:

$$x > 8$$

RISPOSTA: E

BUON LAVORO!


ONLY IN MATH PROBLEMS CAN YOU BUY 60 CANTALOUPES AND NO ONE ASKS WHAT THE HELL IS WRONG WITH YOU.
SCHULZ
PEANUTWEETER.COM
@KARIMI